



XVII. ULUSAL MEKANİK KONGRESİ
5-9 Eylül 2011, Fırat Üniversitesi, Elazığ

ORTOTROP PASTERNAK ZEMİNİNE OTURAN ELİPTİK MİNDLİN PLAĞININ KARIŞIK SONLU ELEMANLARLA STATİK ANALİZİ

Akif Kutlu* ve Ümit N. Arıbaş†
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

Hatice Karayığit‡ ve Mehmet H. Omurtag§
İstanbul Teknik Üniversitesi, İstanbul

ÖZET

Bu çalışmada keyfi doğrultuda ortotropik Pasternak zemini ile etkileşen nispeten kalın elips geometrilili plakların eğilme davranışı incelenmiştir. Mindlin plağı denge denklemlerinde zemin etkisi de barındırılmış ve Gâteaux türevi kullanılarak karışık sonlu eleman formülasyonu kurgulanmıştır. Sonlu eleman çözümünde izoparametrik dörtgen elemanlar kullanılmıştır. Elemanlar üzerinde integraller 2x2 Gauss şeması kullanılarak sayısal olarak hesaplanmıştır. Sayısal çözüm yöntemi literatürle doğrulanmış ve parametrik çözümler sunularak eliptikliğinin ve zemin parametrelerinin plak eğilme davranışına olan etkileri araştırılmıştır.

GİRİŞ

Plak taşıyıcı sistemler birçok mühendislik uygulamasında kullanım alanı bulan ve sık karşılaşılan yapısal elemanlardır. Binalarda döşeme ve temellerde, gemi ve deniz taşıtlarında sıvı basıncına maruz kalan gövde parçalarında, zeminle temas halindeki silo ve tank yapılarında kullanılan plak elemanlar farklı yükleme ve etkileşim türlerine maruz kalırlar [6]. Uygulamada sıklıkla karşılaşılan kare, dikdörtgen, daire ve benzeri basit geometriye sahip plakların incelenmesi için bir çok çalışma yapılmış bazı özel durumlar için de kesin çözümler sunulmuştur [4]. Elips geometrisindeki plakların mekanik davranışı da birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Prabhakara and Chia [15] ince eliptik plakların büyük çökme problemini pertürbasyon yöntemini kullanarak analitik olarak çözmüşlerdir. Kesitte kayma şekil değiştirmelerini dikkate alan Liu ve ark. [10] tabakalı eliptik plakların büyük çökmesi için analitik çözüm üretmişlerdir. Vasilenko ve Urusova [11] kollokasyon yöntemini kullanarak tabakalı malzemedeki üretilmiş eliptik plakların statik davranışını incelemişlerdir. Altekin and Altay [3] Ritz metodunu kullanarak ince süper-eliptik plakları incelerken sınır koşullarını Lagrange çarpanları ile sağlamışlardır. Yakın zamanda Altekin [1] ortotrop süper-eliptik plaklarda noktasal mesnetlerin konumunu optimize ederek, plakta en büyük çökmeyi minimize eden bir çalışma yapmıştır.

Plak zemin etkileşimi problemi, gerek sık karşılaşılmışından, gerekse zeminle etkileşim halinde bulunmanın, yapısal davranışını önemli derecede etkilemesinden ötürü, birçok araştırmacı tarafından çeşitli açılardan incelenmiştir [2]. Mühendislik yaklaşımı için geliştirilmiş mekanik modeller yapı-zemin etkileşim problemlerinde yaygın şekilde kullanılmaktadır. Winkler tarafından sunulan ve bugün hala sıklıkla kullanılan yay modeli, Pasternak tarafından yayların birbiriyle bir kayma etkisiyle etkileştiklerini varsayan modeli ile ileri taşınmıştır [7]. Rashed [8] Pasternak zeminine oturan Reissner plaklarının statik analizi için bir sınır eleman formülasyonu geliştirmiş ve daire geometrilili plaklar için sonuçlar üretmiştir. Yu ve Syracuse [16] Pasternak zeminine oturan

* Araştırma görevlisi, İnşaat Müh. Böl., E-posta: kutluak@itu.edu.tr

† Yüksek lisans öğrencisi, İnşaat Müh. Böl., E-posta: umitaribas@hotmail.com

‡ Yüksek lisans öğrencisi, İnşaat Müh. Böl., E-posta: karayigit@itu.edu.tr

§ Profesör, İnşaat Müh. Böl., E-posta: omurtagm@itu.edu.tr

dairesele plakların kapalı çözümünü ince plak teorisine göre vermiştir. Al-Hosani ve ark. [9] Winkler zemini ile etkileşen Reissner plağı için sınır eleman yöntemini kullanmış; dikdörtgen ve dairesele plaklar için çözümler üretmişlerdir. Wang ve ark. [12] iki parametrelili zemine oturan Reissner plaklarının temel çözümünü ve sınır integral denklemlerini vermişlerdir. Literatürde, elastik zeminle etkileşen dikdörtgen ve daire geometrilili plaklar için bir çok çalışma bulunmasına rağmen, eliptik geometriye sahip plaklar adına çok az çalışma gerçekleştirilmiştir. Datta [13] Winkler zemini ile etkileşen ince eliptik plakların büyük çökme problemini Galerkin yöntemini kullanarak incelemiştir. Zhong ve ark. [5] üçgen diferansiyel kuadratür yöntemini Pasternak zeminine oturan nispeten kalın plakların eğilme problemine uygulamış ve eliptik plaklar için sonuçlar üretmişlerdir. Söz konusu başlıkta yapılan çalışmaların kısıtlılı olması yazarları bu doğrultuda çalışmaya yöneltmiştir. Bu çalışmada yazarlar keyfi doğrultuda ortotrop Pasternak zemin ile etkileşen eliptik Mindlin plaklarının statik yükler altındaki davranışını karışık sonlu elemanlar yöntemini kullanarak incelemiştir. Düzgün yayılı yük altında ankastre sınır koşullarına sahip eliptik plakların eğilme davranışında, zemin parametrelerinin, eliptikliğin derecesinin ve zemin ortotropisinin etkisi araştırılmış, parametrik sonuçlar sunulmuştur.

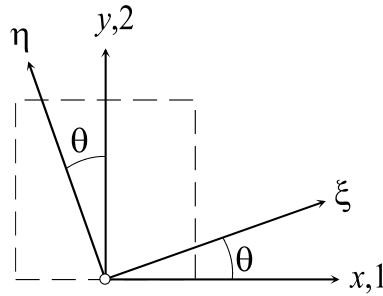
ALAN DENKLEMLERİ ve ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Doğrusal elastisite denklemleri kullanılarak Mindlin alan denklemleri, keyfi doğrultuda ortotrop Pasternak zemininin etkilerini içerecek şekilde genişletilmiştir. Elde edilen denge denklemleri ve plak bünye bağıntıları kullanılarak, potansiyel operatör ilkesi ve Gâteaux türevinden yararlanılarak karışık sonlu eleman çözümüne uygun fonksiyonel elde edilmiştir. Düğüm noktalarındaki bilinmeyenler x, y , ve z eksenleri doğrultusunda yer değiştirmeler ($u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$), iki eksen etrafındaki kesit dönmeleri (Ω_1, Ω_2), düğüm noktalarındaki gerilme bileşikleri ise, iki eğilme (K, M) bir burulma (T) momenti, iki eksenel kuvvet (P, N), iki kesme kuvveti (F, H) ve bir düzlem içi kesme (Q) kuvveti olacak şekilde membran etkileri de barındırmakta ve en geniş halindedir.

Alan Denklemleri ve Fonsiyonel

Keyfi doğrultuda ortotrop Pasternak zemininden Mindlin plağına aktarılan kuvvet yoğunluğu koordinat dönüşüm bağıntıları kullanılarak, plak global koordinat takımında ifade edilmiş ve plak-zemin sisteminin denge denklemlerine ilave edilmiştir. Karışık sonlu eleman formülasyonuna uygun olması bakımından, plak şekil değiştirme alanı hem yer değiştirmeler hem de kuvvet, kuvvet-çifti türünden büyüklükler cinsinden tarif edilmiştir.

Ortotrop Pasternak Zemin: Plak global koordinat takımı (x, y) ya da $(1, 2)$ ve zemin ortotrop zemin için seçilen (ξ, η) koordinat takımı, koordinatlar arasındaki θ açısı ile Şekil 1. de verilmiştir.



Şekil 1: Plak global koordinat takımı ve zeminde ortotropi doğrultuları

Bu özel durumda Pasternak zemininde oluşan kesme kuvvetleri,

$$\begin{aligned} V_{\xi} &= G_{\xi} u_{3,\xi} \\ V_{\eta} &= G_{\eta} u_{3,\eta} \end{aligned} \quad (1)$$

şeklinde olurlar. Burada G_{ξ} ve G_{η} ortotrop zemin ortamında sırasıyla ξ ve η doğrultularındaki kayma zemin kayma parametreleridir. Zemin ile temas eden taşıyıcı sisteme bu durumda,

$$p = ku_3 - V_{\xi,\xi} - V_{\eta,\eta} \quad (2)$$

ifadesi ile verilen basınç kuvveti aktarılır. Zemin yerel koordinatlarını ihtiva eden bu ifadede koordinatlar arası dönüşüm ilişkileri kullanıldığında global koordinat takımında,

$$p = kw$$

$$\begin{aligned} & - G_{\xi} \left(\cos^2 \theta u_{3,xx} + 2 \cos \theta \sin \theta u_{3,yx} + \sin^2 \theta u_{3,yy} \right) \\ & - G_{\eta} \left(\sin^2 \theta u_{3,xx} - 2 \sin \theta \cos \theta u_{3,yx} + \cos^2 \theta u_{3,yy} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

şeklinde elde edilir.

Denge Denklemleri ve Bünnye Bağlıntıları: Zemin etkisinin ilave edilmesiyle Mindlin plağının denge denklemleri,

$$\begin{aligned} Q_{,2} + P_{,1} &= 0 \\ N_{,2} + Q_{,1} &= 0 \\ F_{,1} + H_{,2} + q - ku_3 \\ &+ G_{\xi} \left(\cos^2 \theta u_{3,11} + 2 \cos \theta \sin \theta u_{3,21} + \sin^2 \theta u_{3,22} \right) \\ &+ G_{\eta} \left(\sin^2 \theta u_{3,11} - 2 \sin \theta \cos \theta u_{3,21} + \cos^2 \theta u_{3,22} \right) = 0 \\ K_{,1} + T_{,2} - F &= 0 \\ M_{,2} + T_{,1} - H &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

şeklinde elde edilir. Elastisite denklemleri yardımıyla elastik malzeme ve doğrusal şekil değiştime ilişkileri göz önüne alındığında Mindlin plağında şekil değiştime alanı, yerdeğıştirme ve kuvvet, kuvvet-çifti büyüklükleri cinsinden aşağıdaki gibi tarif edilir.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} = u_{1,1} &= \frac{1}{Eh} (P - \nu N) \quad , \quad \kappa_x = \Omega_{1,1} = \frac{12}{Eh^3} [K - M\nu] \\ \varepsilon_{yy} = u_{2,2} &= \frac{1}{Eh} (N - \nu P) \quad , \quad \kappa_y = \Omega_{2,2} = \frac{12}{Eh^3} [M - K\nu] \\ \gamma_{xy} = u_{1,2} + u_{2,1} - \frac{Q}{Gh} & \quad , \quad \kappa_{xy} = \Omega_{1,2} + \Omega_{2,1} = \frac{12T}{Gh^3} \\ \gamma_{xz} = u_{3,1} + \Omega_1 - \frac{6F}{5Gh} & \quad , \quad \gamma_{yz} = u_{3,2} + \Omega_2 - \frac{6H}{5Gh} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Burada E elastisite modülü, ν poisson oranı, G kayma modülü, h plak kalınlığıdır.

Fonksiyonel: Enerji yöntemine dayalı olan sonlu eleman formülasyonunda, alan denklemlerinden uygun bir enerji ifadesine geçilmesi gerekmektedir. Alan denklemlerinin $\mathbf{L}\mathbf{y} - \mathbf{f} = \mathbf{0}$ yapısında potansiyel bir operatöre dönüştürülmesi potansiyellik koşulunun sağlamasına bağlıdır. Burada, \mathbf{L} türev operatörünü, \mathbf{y} bilinmeyenler vektörü, \mathbf{f} dış etkiler vektörünü temsil etmektedir.

Potansiyelliği araştırılacak operatör yapısı,

$$\mathbf{P} = \mathbf{L}\mathbf{y} - \mathbf{f} \quad (6)$$

dır. Potansiyellik koşulunun matematiksel ifadesi; “ \mathbf{P} fonksiyonunun $\bar{\mathbf{y}}$ yönüne göre türevinin \mathbf{y}^* yönündeki toplamı, aynı fonksiyonun \mathbf{y}^* yönüne göre türevinin $\bar{\mathbf{y}}$ yönündeki toplamına eşit olmalıdır” şeklindedir. Burada, $*$ ve $\bar{}$ birbirinden farklı iki yönü göstermekte, $\bar{\mathbf{y}}$ yönündeki Gâteaux

türevi $d\mathbf{P}(\mathbf{y};\bar{\mathbf{y}})$ ve \mathbf{y}^* yönündeki Gâteaux türevi $d\mathbf{P}(\mathbf{y};\mathbf{y}^*)$ biçiminde, $\bar{\mathbf{y}}$ yönündeki iç çarpım $\langle \dots, \bar{\mathbf{y}} \rangle$ ve \mathbf{y}^* yönündeki iç çarpım $\langle \dots, \mathbf{y}^* \rangle$ biçiminde gösterilmektedir. Buradan potansiyellik koşulu,

$$\langle d\mathbf{P}(\mathbf{y};\bar{\mathbf{y}}), \mathbf{y}^* \rangle \equiv \langle d\mathbf{P}(\mathbf{y};\mathbf{y}^*), \bar{\mathbf{y}} \rangle \quad (1.7)$$

şeklinde gösterilir. Burada köşeli parantezle gösterilen iç çarpımın ve yönsel türevin tanımlanması gerekmektedir. İç çarpım, bir fonksiyon ile başka bir fonksiyon veya değişkenin çarpımının belirli bir aralıktaki integralidir. Bu çalışmada fonksiyonel eldesinde kullanılacak olan Gâteaux türevinin matematiksel ifadesi,

$$d\mathbf{P}(\mathbf{y};\bar{\mathbf{y}}) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{P}(\mathbf{y} + s\bar{\mathbf{y}}) - \mathbf{P}(\mathbf{y})}{s} \right] = \frac{\mathbf{P}(\bar{\mathbf{y}})}{1} = \mathbf{P}(\bar{\mathbf{y}}) \quad (1.8)$$

şeklinde [14]. s bir skaler olmak üzere, fonksiyonelin birinci varyasyonu,

$$\delta I(\mathbf{y}; \boldsymbol{\eta}) = \left. \frac{d}{ds} I(\mathbf{y} + s\boldsymbol{\eta}) \right|_{s=0} = \langle \mathbf{P}(\mathbf{y}, \mathbf{f}), \mathbf{y} \rangle \quad (1.9)$$

şeklinde [14]. İntegrasyon işlemi gerçekleştirildiğinde,

$$I(\mathbf{y}) = \int_0^1 \langle \mathbf{P}(s\mathbf{y}, \mathbf{f}), \mathbf{y} \rangle ds \quad (1.10)$$

şeklinde fonksiyonel elde edilir [14].

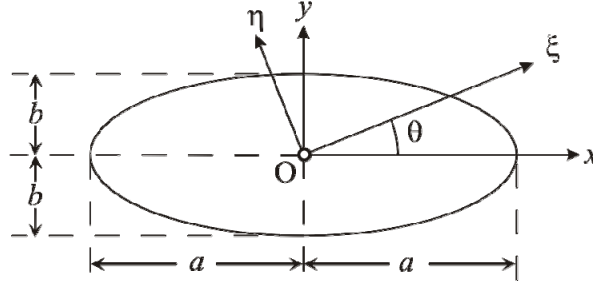
$$\begin{aligned} I(y) = & [Q, u_{1,2}] + [P, u_{1,1}] + [Q, u_{2,1}] + [N, u_{2,2}] - \frac{1}{2Eh} [P, P] + \frac{\nu}{Eh} [N, P] - \frac{1}{2Eh} [N, N] - \frac{1}{2Gh} [Q, Q] + [F, u_{3,1}] \\ & + [H, u_{3,2}] + [F, \Omega_1] + [H, \Omega_2] - \frac{3}{5Gh} [F, F] - \frac{3}{5Gh} [H, H] - [M_{,2}, \Omega_2] - [T_{,1}, \Omega_2] - [K_{,1}, \Omega_1] - [T_{,2}, \Omega_1] - \frac{6}{Eh^3} [K, K] \\ & + \frac{12\nu}{Eh^3} [M, K] - \frac{6}{Eh^3} [M, M] - \frac{6}{Gh^3} [T, T] - [q_x, u_1] - [q_y, u_2] - [q_z, u_3] - [m_x, \Omega_1] - [m_y, \Omega_2] \\ & + \frac{1}{2} k [u_3, u_3] + \frac{\cos^2 \theta}{2} G_\xi [u_{3,1}, u_{3,1}] + \frac{\cos \theta \sin \theta}{2} G_\xi [u_{3,1}, u_{3,2}] + \frac{\cos \theta \sin \theta}{2} G_\xi [u_{3,2}, u_{3,1}] + \frac{\sin^2 \theta}{2} G_\xi [u_{3,2}, u_{3,2}] \\ & + \frac{\sin^2 \theta}{2} G_\eta [u_{3,1}, u_{3,1}] - \frac{\cos \theta \sin \theta}{2} G_\eta [u_{3,1}, u_{3,2}] - \frac{\cos \theta \sin \theta}{2} G_\eta [u_{3,2}, u_{3,1}] + \frac{\cos^2 \theta}{2} G_\eta [u_{3,2}, u_{3,2}] \\ & + \left\{ \langle \Omega_1, ((K - \hat{K}) + (T - \hat{T})) \rangle + \langle \Omega_2, ((M - \hat{M}) + (T - \hat{T})) \rangle - \langle u_1, (\hat{Q} + \hat{P}) \rangle - \langle u_2, (\hat{Q} + \hat{N}) \rangle - \langle u_3, (\hat{F} + \hat{H}) \rangle \right\}_{\sigma_p} \\ & - \left\{ [(\hat{K}_{,1} + \hat{T}_{,2}) + (\hat{M}_{,2} + \hat{T}_{,1}), u_3] + [(K - \hat{K}) + (T - \hat{T}), u_{3,1}] + [(M - \hat{M}) + (T - \hat{T}), u_{3,2}] \right\}_{\sigma_p} \\ & + \left\{ [(K_{,1} + T_{,2}) + (M_{,2} + T_{,1}), (u_3 - \hat{u}_3)] - [(K + T), \hat{u}_{3,1}] - [(M + T), \hat{u}_{3,2}] \right\}_{\epsilon_p} - \left\{ G_\xi \cos^2 \theta u_{3,1}, (u_3 - \hat{u}_3) \right\}_\epsilon \\ & - \left\{ G_\xi \cos \theta \sin \theta u_{3,2}, (u_3 - \hat{u}_3) \right\}_\epsilon - \left\{ G_\xi \cos \theta \sin \theta u_{3,2}, (u_3 - \hat{u}_3) \right\}_\epsilon - \left\{ G_\xi \sin^2 \theta u_{3,2}, (u_3 - \hat{u}_3) \right\}_\epsilon \\ & - \left\{ G_\eta \sin^2 \theta u_{3,1}, (u_3 - \hat{u}_3) \right\}_\epsilon + \left\{ G_\eta \sin \theta \cos \theta u_{3,1}, (u_3 - \hat{u}_3) \right\}_\epsilon + \left\{ G_\eta \sin^2 \theta \hat{u}_{3,1}, u_3 \right\}_\sigma + \left\{ G_\xi \cos^2 \theta \hat{u}_{3,1}, u_3 \right\}_\sigma \\ & - \left\{ G_\eta \cos^2 \theta u_{3,2}, (u_3 - \hat{u}_3) \right\}_\epsilon + \left\{ G_\xi \cos \theta \sin \theta \hat{u}_{3,1}, u_3 \right\}_\sigma + \left\{ G_\xi \cos \theta \sin \theta \hat{u}_{3,2}, u_3 \right\}_\sigma + \left\{ G_\eta \cos^2 \theta \hat{u}_{3,2}, u_3 \right\}_\sigma \\ & + \left\{ G_\xi \sin^2 \theta \hat{u}_{3,2}, u_3 \right\}_\sigma - \left\{ G_\eta \sin \theta \cos \theta \hat{u}_{3,1}, u_3 \right\}_\sigma - \left\{ G_\eta \sin \theta \cos \theta \hat{u}_{3,2}, u_3 \right\}_\sigma + \left\{ G_\eta \sin \theta \cos \theta u_{3,2}, (u_3 - \hat{u}_3) \right\}_\epsilon \end{aligned} \quad (11)$$

Alt indis gösterimi $\{ \dots \}_\sigma$ ile $\{ \dots \}_\epsilon$, sırasıyla dinamik ve geometrik sınır koşullarını tanımlamaktadır. Ayrıca $(\hat{\quad})$ da bilinen sınır koşullarını temsil eder. Eğer $(\hat{\quad})$ sınır koşulu terimi belli değilse bu

terimler düşer. Sonlu eleman çözümünde dört düğüm noktalı dörtgen elemanlar kullanılmakta ve integraller sayısal olarak 2×2 Gauss şeması kullanılarak hesaplanmaktadır.

SAYISAL ÖRNEKLER

Sunulan çözüm yönteminin doğrulanması için ilk olarak literatürdeki benzer çalışmalarla karşılaştırma yapılmış daha sonra parametrik çözümler yapılarak plak davranışı incelenmiştir. Çözümlerde aksi belirtilmedikçe D plak rijitliği olmak üzere Winkler zemin parametresi $\tilde{k} = ka^4 / D$, ve zemin kayma parametresi ise $\tilde{G}_f = G_f a^2 / D$ şeklinde boyutsuzlaştırılmış, elde edilen sonuçlar yine boyutsuz olarak sunulmuştur. Eliptik plak geometrisi, plak global eksenleri ve zemin yerel eksen takımı Şekil 2 de gösterildiği gibidir.



Şekil 2: Eliptik plak geometrisi ve koordinat takımları

Doğrulama ve Yakınsama Örneği: Çözüm yöntemi ilk olarak elastik zeminle etkileşen dairesel plak çözüm karşılaştırmalarıyla doğrulanmış ve sonlu eleman ağına göre yakınsama durumu incelenmiştir. Doğrulama amacı ile Rashed [8] ile Yu ve Syracuse'nin [16] çalışmalarındaki ince daire plak problemi çözülmüştür ve karşılaştırma yapılmıştır. Düzgün yayılı yük altındaki ankastre mesnetli plak, problemin simetrisi nedeniyle çeyrek olarak ele alınmıştır. Plak kalınlığının, plak yarıçapına oranı $h/b = 0.01$ ve plak malzemesinin Poisson's oranı 0.3'tür. Plak orta noktasındaki boyutsuz çökme (\tilde{w}) ve eğilme momenti ($\tilde{K} = \tilde{M}_{xx}$) değerleri Çizelge 1. de verilmiştir. Boyutsuz Winkler zemin parametresi $\tilde{k} = 200$ sabit tutulmuş ve üç farklı zemin kayma parametresi için ($\tilde{G}_f = 300, 28.9$ ve 3) sonuçlar üretilmiştir. Çizelge 1. de m eleman sayısını göstermek üzere yakınsama incelemesi de sunulmuştur. Çizelgeden görüldüğü gibi, değerlerin yakınsaması büyük kayma parametrelili zeminlerde daha hızlı olmaktadır. Sonuçların karşılaştırıldıkları çalışmalardakilerle son derece uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 1: Düzgün yayılı yük etkisindeki dairesel plakta orta noktada boyutsuz çökme ve eğilme

moment değerleri ($\tilde{w} = \frac{wD}{qb^4} \times 1000$, $\tilde{K} = \frac{K}{qb^2} \times 1000$, q : yayılı yük şiddeti)

		$\tilde{G}_f = 300$		$\tilde{G}_f = 28.9$		$\tilde{G}_f = 3$	
m		\tilde{w}	\tilde{K}	\tilde{w}	\tilde{K}	\tilde{w}	\tilde{K}
bu çalışma	48	0.62	1.75	2.93	8.60	4.74	16.63
	108	0.64	1.89	2.95	9.60	4.67	16.79
	192	0.65	1.89	2.96	9.92	4.65	17.18
	300	0.65	1.88	2.97	9.99	4.65	17.45
Rashed (2000)		0.68	1.86	3.01	9.79	4.64	18.74
Yu (1957)		0.67	1.78	3.00	10.00	4.55	19.50

Sabit Alanlı Eliptik Plak: Eliptikliğin derecesinin ve zeminin ortotropik özelliğinin plak eğilme davranışını nasıl etkilediği incelenecektir. Bu amaçla sabit kalınlıklı, ankastre mesnetlenmiş ve yüzey alanı sabit olacak şekilde geometrisi daireden ($a/b = 1$) elipse doğru ($a/b = 2, 3$) değişen kalın plakların düzgün yayılı yük altındaki statik analizi yapılmıştır. Plak malzemesinde Poisson's oranı $\nu = 0.3$ seçilmiş ve $a/b = 3$ değerinde $h/b = 0.1$ oranı için belirlenen plak kalınlığı diğer

geometriler için de değiştirilmeden kullanılmıştır. Çözümlerde eliptik plağın her iki yarıçapı da değişken olduğundan zemin parametreleri $\bar{k} = ka^2b^2 / D$, $\bar{G}_f = G_f ab / D$ şeklinde

boyutsuzlaştırılmıştır. Boyutsuz zemin yay sabiti $\bar{k} = 2.88$ ve ortotropik zemin kayma parametreleri $\bar{G}_\xi = 0.36$ ve $\bar{G}_\eta = 36$ olarak seçilmiştir. Problemin simetrisinden ötürü $\theta, 0^\circ$ ve 90° aralığında kalacak şekilde tam plakta analizler gerçekleştirilmiştir. Plak orta noktasındaki boyutsuzlaştırılmış çökme (\bar{w}) ve eğilme momenti (\bar{K}) değerleri Çizelge 2 de sunulmuştur. Daire plakta beklendiği gibi çökme değerinin zemin ortotropi doğrultusundan bağımsız olduğu görülmektedir. Sabit alan için sunulan bu sonuçlarda, plak geometrisi, daireden elipse dönüştükçe çökme değerlerinin azaldığı görülmüştür. Belli bir a/b oranı için incelendiğinde çökme parametrelerinin $\theta = 0^\circ$ da en küçük ve $\theta = 90^\circ$ da en büyük değerlerini aldığı söylenebilir. $a/b = 2$ ve 3 oranları için karşılaştırıldığında çökme parametrelerindeki farklılık yüzde olarak $\theta = 0^\circ$ da 58.4%, $\theta = 45^\circ$ de 55% ve $\theta = 90^\circ$ da 48.9% olduğu görülmektedir. Sabit alan çözümünden görüldüğü üzere plak çökmeleri eliptiklikteki değişime oldukça duyarlıdır. Eliptiklikle birlikte en büyük değişim ise $\theta = 0^\circ$ de gerçekleşmektedir.

Çizelge 2: Düzgün yayılı yük altında sabit alanlı eliptik plağın orta noktasında boyutsuzlaştırılmış

$$\text{çökme ve eğilme momenti değerleri; } \bar{w} = \frac{wD}{qa^2b^2} \times 1000, \bar{K} = \frac{K}{qab} \times 1000$$

a/b	θ	\bar{w}					\bar{K}				
		0°	30°	45°	60°	90°	0°	30°	45°	60°	90°
1		6.97	6.97	6.97	6.97	6.97	31.78	31.00	30.24	29.39	28.55
2		5.06	5.51	6.03	6.67	7.45	17.96	19.73	21.79	24.13	26.96
3		2.10	2.37	2.71	3.17	3.80	8.40	9.76	11.53	13.89	17.33

Çizelge 3 de diğer doğrultudaki boyutsuzlaştırılmış eğilme momenti \bar{M} ve burulma momenti \bar{T} plak orta noktası için verilmiştir. Eliptikliğin artmasıyla birlikte moment değerlerinin ortotropi doğrultusundaki değişimden daha çok etkilendiği görülmektedir. Ortotropi doğrultularının plak global eksenleriyle çakışması durumunda plak orta noktasında simetriden ötürü burulma momenti oluşmamaktadır. Ortotropi eksenlerinin global eksenlerden uzaklaşmasıyla birlikte merteye olarak eğilme momentleriyle kıyaslandığında küçük burulma momenti değerleri oluşmaktadır.

Çizelge 3: Düzgün yayılı yük altında sabit alanlı eliptik plağın orta noktasında boyutsuzlaştırılmış

$$\text{eğilme ve burulma momenti değerleri; } \bar{M} = \frac{M}{qab} \times 1000, \bar{T} = \frac{T}{qab} \times 1000$$

a/b	θ	\bar{M}					\bar{T}				
		0°	30°	45°	60°	90°	0°	30°	45°	60°	90°
1		28.55	29.39	30.24	31.00	31.78	0.00	1.51	1.71	1.51	0.00
2		26.22	29.69	33.93	39.13	45.78	0.00	0.90	1.23	1.30	0.00
3		21.47	24.95	29.52	35.68	44.79	0.00	0.16	0.25	0.32	0.00

SONUÇ

Bu çalışmada keyfi doğrultuda ortotrop olarak tanımlanmış Pasternak zeminine oturan, nispeten kalın plakların düzgün yayılı yük altındaki statik davranışı incelenmiştir. Doğrusal şekil değiştirme ve elastik malzeme kabulü ile Mindlin plağı alan denklemleri sistemin mekanik modellenmesinde kullanılmıştır. Problem için karışık sonlu eleman formülasyonu önerilmiş ve çözümler bilgisayar ortamında sayısal programlama ile gerçekleştirilmiştir. Sayısal çözüm sürecinde plak bölgesi dört düğüm noktalı izoparametrik elemanlar ile tarif edilmiş ve elemanlar üzerinde integraller 2x2 Gauss şeması kullanılarak sayısal olarak hesaplanmıştır. Tarif edilen problemin çözümü için önerilen çözüm yöntemi ve sayısal analiz süreci literatürle yapılan karşılaştırmalar ile doğrulanmıştır. Eliptikliğin ve zemin parametrelerindeki değişimin plağın statik davranışı üzerindeki etkilerini incelemek amacıyla parametrik çözümler yapılmış ve sonuçlar tablolar halinde verilip

yorumlanmıştır. Birbirleriyle etkileşimli olarak hem eliptiklik derecesinin hem de zemin ortotropi özelliklerinin plak eğilme davranışında önemli rol oynadığı görülmüştür.

Kaynaklar

- [1] M. Altekin, *Bending of orthotropic super-elliptical plates on intermediate point supports*, Ocean Engineering. 37 (2010) 1048-1060.
- [2] B. Ugurlu, A. Kutlu, A. Ergin, M.H. Omurtag, *Dynamics of a rectangular plate resting on an elastic foundation and partially in contact with a quiescent fluid*, Journal of Sound and Vibration. 317 (2008) 308-328.
- [3] M. Altekin, G. Altay, *Static analysis of point-supported super-elliptical plates*, Archive of Applied Mechanics. 78 (2008) 259-266.
- [4] J.N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*, CRC Press, 2006.
- [5] H. Zhong, X. Li, Y. He, *Static flexural analysis of elliptic Reissner-Mindlin plates on a Pasternak foundation by the triangular differential quadrature method*, Archive of Applied Mechanics. 74 (2005) 679-691.
- [6] R. Szilard, *Theories and applications of plate analysis*, John Wiley and Sons, 2004.
- [7] S.C. Dutta, R. Roy, *A critical review on idealization and modeling for interaction among soil-foundation-structure system*, Computers & Structures. 80 (2002) 1579-1594.
- [8] Y.F. Rashed, *An alternative treatment of body forces in the BEM for thick plates resting on elastic foundations*, Engineering Analysis with Boundary Elements. 24 (2000) 491-501.
- [9] K. Al-Hosani, S. Fadhil, A. El-Zafrany, *Fundamental solution and boundary element analysis of thick plates on Winkler foundation*, Computers & Structures. 70 (1999) 325-336.
- [10] R. Liu, J. Xu, S. Zhai, *Large-deflection bending of symmetrically laminated rectilinearly orthotropic elliptical plates including transverse shear*, Archive of Applied Mechanics. 67 (1997) 507-520.
- [11] A. Vasilenko, G. Urusova, *Stress state of freely supported multilayered elliptical plates of anisotropic materials*, Mechanics of Composite Materials. 33 (1997) 349-355.
- [12] J. Wang, X. Wang, M. Huang, *Fundamental solutions and boundary integral equations for Reissner's plates on two parameter foundations*, International Journal of Solids and Structures. 29 (1992) 1233-1239.
- [13] S. Datta, *Large deflections of elliptic plates exhibiting rectilinear orthotropy and placed on elastic-foundation*, Journal of Applied Mechanics-transactions of the Asme. 43 (1976) 690-692.
- [14] J.T. Oden, J.N. Reddy, *Variational methods in theoretical mechanics*, Springer-Verlag, 1976.
- [15] M. Prabhakara, C. Chia, *Bending of elliptical orthotropic plates with large deflection*, Acta Mechanica. 21 (1975) 29-40.
- [16] Y.-Y. Yu, N.Y. Syracuse, *Axisymmetrical bending of circular plates under simultaneous action of lateral load, force in the middle plane, and elastic foundation*, Journal of Applied Mechanics ASME. 1 (1957) 141-143.